SUJET DE BACCALAURÉAT (MAROC , Juin 2006)

EPREUVE DE MATHEMATIQUES, FILIERE SCIENCES MATH

Correction proposée par Hicham BASSOU (evariste) & Saïd BENLAADAM

EXERCICE 1

Partie I

1) G est une partie stable de $\left(M_2(\mathbb{R}), \times\right)$

Soient $M_{(a,b)}$ et $M_{(c,d)}$ deux éléments de $M_2(\mathbb{R})$.

On a $M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+bc & bd \end{pmatrix} = M_{(a+bc, bd)}$, comme $bd \neq 0$, alors $M_{(a+bc\,,\,bd)} \in G$.

Donc G est une partie stable de $\left(M_2(\mathbb{R}), \times\right)$.

2) $(G, \times)$ est un groupe

D'abord, il est clair que G est non vide.

>> Associativité de la loi $\times$
La loi $\times$ est associative dans $M_2(\mathbb{R})$, elle l'est aussi dans G.

>> Elément neutre
On a $M_{(1\,,\,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est la matrice identité dans $M_2(\mathbb{R})$.
Donc $M_{(1,0)}$ est l'élément neutre de G.

D'après la question 1), G est stable donc la loi $\times$ est une loi interne à G.
Montrons que tout élément de G admet un élément inversible.
$\forall (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, cherchons $(c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tel que $M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = M_{(c,d)} \times M_{(a,b)} = M_{(1,0)}$,

c'est à dire, $\begin{cases} a+bc=0 \\ bd=1 \\ c+da=0 \end{cases}$, autrement dit, $d = \dfrac{1}{b}$ et $c = \dfrac{-a}{b}$ est la seule solution de ce système.

Donc tout élément $M_{(a,b)}$ de G admet un élément inversible à savoir $M_{\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)}$.

Conclusion : G est un groupe.

Il reste à vérifier si G est commutatif, pour cela, on a,
$M_{(1,1)} \times M_{(1,2)} = M_{(2,2)}$ et $M_{(1,2)} \times M_{(1,1)} = M_{(3,2)}$, donc G n'est pas commutatif.

3) H est un sous groupe de $(G, \times)$

D'abord, il est clair que H est non vide.

Il suffit ensuite de montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\forall (c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $M_{(a,b)} \times \left(M_{(c,d)}\right)^{-1} \in H$.

$$M_{(a,b)} \times \left(M_{(c,d)}\right)^{-1} = M_{(a,b)} \times M_{\left(-\frac{c}{d}, \frac{1}{d}\right)} = M_{\left(a - \frac{bc}{d}, \frac{b}{d}\right)}.$$

Comme $b > 0$ et $d > 0$, alors $\frac{b}{d} > 0$, donc $M_{(a,b)} \times \left(M_{(c,d)}\right)^{-1} \in H$ et H est bien un sous groupe de $(G, \times)$.

4) Expression de A^n en fonction de n et de a.

On a, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$.

Montrons par récurrence que A^n est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_n & 1 \end{pmatrix}$ et donnons une formule de récurrence à u_n.

Pour $n = 1$, on a $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ et $u_1 = a$.

On suppose que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_n & 1 \end{pmatrix}$, alors $A^{n+1} = A^n \times A = M_{(u_n, 1)} \times M_{(a, 1)} = M_{(a+u_n, 1)}$

Donc $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a + u_n & 1 \end{pmatrix}$ et $u_{n+1} = a + u_n$.

$\forall n \geq 1$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_n & 1 \end{pmatrix}$ avec (u_n) une suite arithmétique vérifiant $u_{n+1} = n + u_n$, d'où $u_n = na$.

Au final, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$

Partie II

1) φ est un morphisme bijectif de $(G, \times)$ vers $\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T\right)$

Soient (a,b) et (c,d) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, alors,

$$\varphi\left(M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}\right) = \varphi\left(M_{(a+bc, bd)}\right) = (a + bc, bd) = (a,b)T(c,d) = \varphi\left(M_{(a,b)}\right) T \varphi\left(M_{(c,d)}\right).$$

φ est donc un morphisme de $(G, \times)$ vers $\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T\right)$.

Par ailleurs, φ est clairement surjectif car $\forall(a,b)$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, on a $(a,b)=\varphi\left(M_{(a,b)}\right)$ est l'image de φ.

Il reste à montrer que φ est injective.

Soient (a,b) et (c,d) dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ tels que $\varphi\left(M_{(a,b)}\right)=\varphi\left(M_{(c,d)}\right)$.

Alors, $(a,b)=(c,d)$ et donc $a=c$ et $b=d$, d'où $M_{(a,b)}=M_{(c,d)}$.

φ est donc injectif, on en déduit que φ est bijectif.

φ est un morphisme bijectif de $(G,\times)$ vers $\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,T\right)$.

2) Structure algébrique de $\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,T\right)$

Comme φ est un morphisme bijectif de $(G,\times)$ vers $\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,T\right)$, alors $\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,T\right)$ est isomorphe à $(G,\times)$, comme ce dernier est un groupe non commutatif, alors $\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,T\right)$ est également un groupe non commutatif.

3) Le symétrique de $\underbrace{(a,1)T(a,1)T\ldots\ldots\ldots\ldots(a,1)T}_{\text{n fois}}$ dans $\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,T\right)$

On a $\underbrace{(a,1)T(a,1)T\ldots\ldots\ldots\ldots(a,1)T}_{\text{n fois}}=\varphi\Big(\underbrace{M_{(a,1)}\times\ldots\ldots\ldots\times M_{(a,1)}}_{\text{n fois}}\Big)=\varphi\left({M_{(a,1)}}^n\right)$ en empruntant les notations de la question 4.

D'après cette même question, on a $\left(M_{(a,1)}\right)^n=M_{(na\,,\,1)}$, donc,

$\underbrace{(a,1)T(a,1)T\ldots\ldots\ldots\ldots(a,1)T}_{\text{n fois}}=\varphi\left(M_{(na\,,\,1)}\right)$.

Le symétrique de cet élément est donc $\varphi\left({M_{(na\,,\,1)}}^{-1}\right)=\varphi\left(M_{(-na\,,\,1)}\right)=(-na,1)$.

EXERCICE 2

On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation $x^2(x+y) = y^2(x-y)^2$, on note (E) cette équation.

1) On pose $d = PGCD(x, y)$, $x = ad$ et $y = bd$

a. Vérifier que $d\,b^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$

On a $x^2(x+y) = a^2d^2(ad+bd) = a^2d^3(a+b)$ et $y^2(x-y)^2 = b^2d^4(a-b)^2$, d'où, $a^2d^3(a+b) = b^2d^4(a-b)^2$, en divisant par d^3 qui est par définition non nul, on trouve $d\,b^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$.

b. En déduire que b = 1

De la question précédente, on déduit que b divise $a^2(a+b)$, comme b est premier avec a, il est alors premier avec a^2 et d'après le théorème de Gauss, b divise $a+b$.
Il existe donc un entier n tel que $a+b = nb$, ce qui implique que $a = (n-1)b$ et que b divise a.
Alors, b divise $PGCD(a\,,\,b) = 1$.
Donc $b = 1$.

c. $a \neq 1$ et (a - 1) divise (a + 1)

En remplaçant b par 1 dans la relation $d\,b^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$, on obtient $d\,(a-1)^2 = (a+1)a^2$.

Comme $(a+1)a^2 > 0$ alors $(a-1)^2 \neq 0$ et donc $a \neq 1$.

Par ailleurs, $(a-1)$ divise $(a+1)a^2$ comme $(a-1)$ est premier avec a [1] alors $(a-1)$ divise $(a+1)$.

d. a = 2 ou a = 3

On déduit de la question précédente que $(a-1)$ divise $a+1-(a-1) = 2$,
Donc $a-1 = \pm 1\ ,\ \pm 2$, soit $a = 0\ ,\ 2\ ,\ -1\ ,\ 3$.

Les solutions 0 et -1 n'appartiennent pas à $\mathbb{N}^*$, donc $a = 2$ ou $a = 3$.

2) Résolution de l'équation (E)

Soit $(x\,,\,y)$ solution de (E) et $d = PGCD(x, y)$, $x = ad$ et $y = bd$.
D'après les questions précédentes, on a $a = 2$ ou $a = 3$ et $b = 1$.

Si $a = 2$, alors d'après la question 1. a), on a $d = 3 \times 2^2 = 12$.

Si $a = 3$, alors $d \times 4 = 4 \times 3^2 \;\Rightarrow\; d = 9$.

[1] On peut le voir via une identité de Bezout, $a-(a-1) = 1$, donc $PGCD(a\,,\,a-1) = 1$.

Donc les seules solutions possibles sont $(2\times 12\ ,\ 12)=(24,12)$ et $(3\times 9,9)=(27,9)$.

Réciproquement, $(24,12)$ et $(27,9)$ sont solutions de (E), en effet,

>> $(24,12)$ est solution de (E)

$24^2(24+12)=24^2\times 36=(12\times 2)^2\times 12\times 3=12^3\times 4\times 3=12^4$ et $12^2(24-12)^2=12^4$.

>> $(27,9)$ est solution de (E)

$27^2(27+9)=27^2\times 36=(9\times 3)^2\times 9\times 4=9^4\times 4$ et $9^2(27-9)^2=9^2\times 18^2=9^2\times(9\times 2)^2=9^4\times 4$.

Finalement, les seules solutions de (E) sont $(24,12)$ et $(27,9)$.

EXERCICE 3

Partie I

1) Une équation cartésienne de (H)

On a $P(z)=z^2-(2+6i)z$, on pose $z=x+iy$ avec x et y des réels.

$P(z)=x^2-y^2+2ixy-(2+6i)(x+iy)=x^2-y^2-2x+6y+i(2xy-2y-6x)$

$P(z)$ est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(P(z))=0$, soit $x^2-y^2-2x+6y=0$.

2) Nature de l'ensemble (H)

>> (H) est une hyperbole

(H) a pour équation $x^2-y^2-2x+6y=0$, que l'on peut écrire $(x-1)^2-(y-3)^2=-8$, autrement dit, $\dfrac{(x-1)^2}{8}-\dfrac{(y-3)^2}{8}=-1$, d'où, $\dfrac{X^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}-\dfrac{Y^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}=-1$ avec $\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-3 \end{cases}$.

(H) est une hyperbole de centre $\Omega(1\ ,\ 3)$ et d'équation $\dfrac{X^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}-\dfrac{Y^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}=-1$ dans le repère $\left(\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.

>> Sommets de (H)

On a $a=b=2\sqrt{2}$,

Les sommets sont $A\left(0\ ,\ 2\sqrt{2}\right)$ et $A^{'}\left(0\ ,\ -2\sqrt{2}\right)$ dans le repère $\left(\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$ et $A\left(1\ ,\ 1+2\sqrt{2}\right)$ et $A^{'}\left(3\ ,\ 3-2\sqrt{2}\right)$ dans le repère $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.

>> Les asymptotes de (H)

Dans le repère $\left(\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$, les asymptotes ont pour équation $Y=\dfrac{b}{a}X$ et $Y=-\dfrac{b}{a}X$, c'est à dire $Y=X$ et $Y=-X$.

Dans le repère $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$, les asymptotes ont pour équation $y=x+2$ et $y=-x+4$.

3) O est un point de (H)

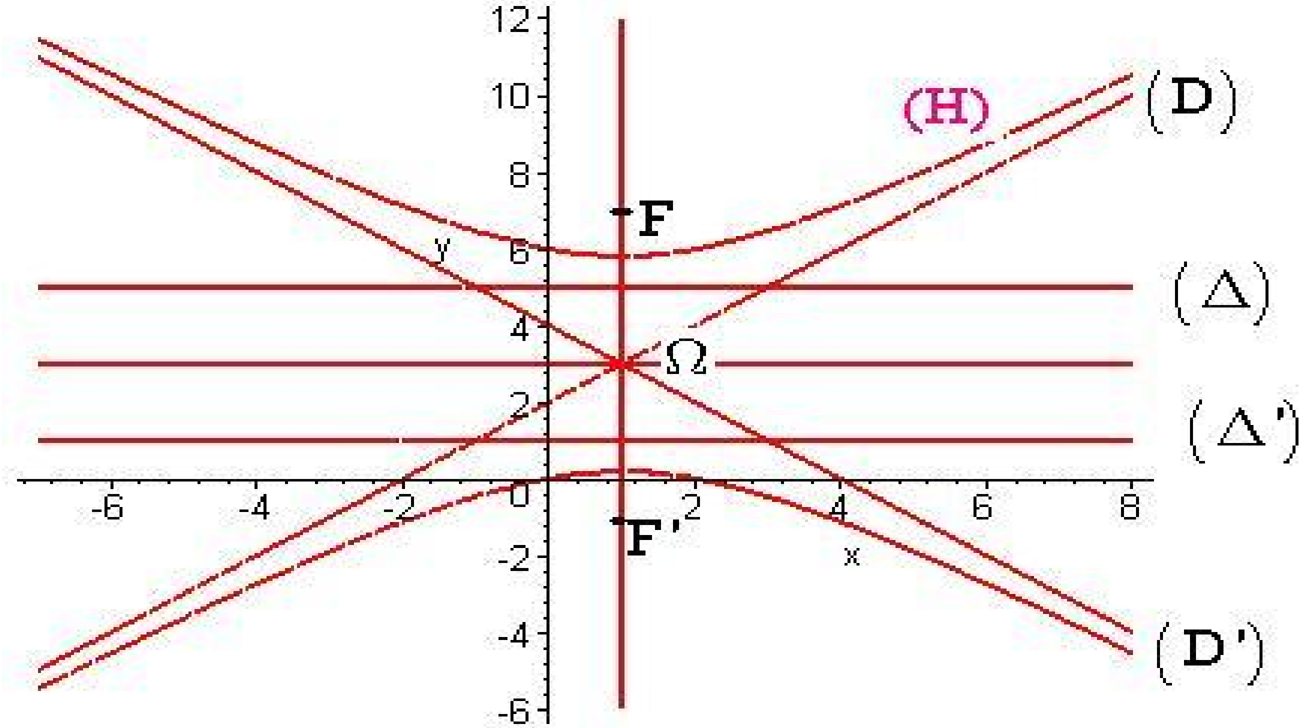
Le point $O(0,0)$ vérifie bien l'équation $x^2-y^2-2x+6y=0$, donc O appartient bien à (H).

Une équation cartésienne de la tangente à (H) au point O dans le repère $\left(\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$ est donnée par la formule $\dfrac{X\,X_0}{8}-\dfrac{Y\,Y_0}{8}=-1$ avec $\left(X_0\,,\,Y_0\right)$ les coordonnées du point O dans le repère $\left(\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.

On a donc $O(-1,\,-3)$, l'équation $\dfrac{X\,X_0}{8}-\dfrac{Y\,Y_0}{8}=-1$ devient alors $X-3Y-8=0$.

En remplaçant X et Y respectivement par $x-1$ et $y-3$, on obtient l'équation de cette tangente dans le repère $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$, soit, $x-3y=0$.

4) Représentation graphique de (H)



(H)
(D)
F
Ω
(Δ)
(Δ')
F'
(D')
x
y

Partie II

1) Résolution de l'équation P(z) = 4 – 6i

$P(z) = 4 - 6i \Leftrightarrow z^2 - (2+6i)z + 6i - 4 = 0$

$\Delta' = (1+3i)^2 - (6i-4) = -4$

Les solutions de cette équation sont $z_1 = 1+3i+2i = 1+5i$ et $z_2 = 1+3i-2i = 1+i$.

2) Une formule

a. $u^4 \times v = 4w$

$u^4 \times v = (1+5i)^4 \times (1+i) = (-24+10i)^2 \times (1+i) = 4(-12+5i)^2 \times (1+i) = 4(119-120i) \times (1+i)$

$u^4 \times v = 4(239-i) = 4w$

b. Un argument de u en fonction de α et un argument de w en fonction de β

Notons θ_u un argument de u, on a $\tan(\theta_u) = \dfrac{\mathrm{Im}(u)}{\mathrm{Re}(u)} = 5 \;\; [\,2\pi\,]$, donc $\theta_u = \arctan(5) \;\; [\,2\pi\,]$.

Par ailleurs, on a $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \varepsilon \dfrac{\pi}{2}$, avec ε = signe de x, d'où,

$\theta_u = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \alpha \;\; [2\pi]$.

De même, on a $\tan(\theta_w) = \dfrac{-1}{239} \;\; [2\pi]$, d'où $\theta_w = \arctan\left(\dfrac{-1}{239}\right) = -\arctan\left(\dfrac{1}{239}\right) = -\beta \;\; [\,2\pi\,]$ car la fonction $\arctan(x)$ est impaire.

c. $4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

On part de la relation démontrée à la question 2.a, c'est à dire,

$$u^4 \times v = 4w$$
$$\arg\left(u^4 v\right) = \arg(4w) \;\; [\,2\pi\,]$$
$$\arg\left(u^4\right) + \arg(v) = \arg(4) + \arg(w) \;\; [\,2\pi\,]$$
$$4\arg(u) + \arg(v) = 0 + \arg(w) \;\; [\,2\pi\,]$$

Notons, au passage que, $v = 1+i$ donc $|v| = \sqrt{2}$ et $\begin{cases} \cos(\theta_v) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_v) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, d'où $\theta_v = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$$4\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{\pi}{4} = -\beta\ \ [2\pi]$$

$$2\pi - 4\alpha + \frac{\pi}{4} = -\beta\ \ [2\pi]$$

$$4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}\ \ [2\pi]$$

Or $\arctan(x) - \arctan(0) = \dfrac{1}{1+c^2}(x-0)$, d'où $\arctan(x) \le x$.

On en déduit que $|4\alpha - \beta| \le \dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{239}$, d'où, $4\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad 4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

EXERCICE 4

Partie I – Etude de la fonction g_n

1) Tableau de variations de g_n

g_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g_n(x) = nx + 2\ln(x)$ et n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

g_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g_n'(x) = n + \dfrac{2}{x} > 0$, de plus $\lim\limits_{x \to 0^+} g_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty$.

Le tableau de variations de g_n est ainsi :

x	0		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	
$g_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) Pour tout réel x non nul, $\sqrt{x} > \ln(x)$

On pose $d(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$ et on va démontrer que $d(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

d est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $d'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$.

d admet un minimum en $x = 4$, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on a,

$d(x) \geq d(4) = 2(1-\ln(2)) = 2(\ln(e)-\ln(2)) = 2\ln\left(\dfrac{e}{2}\right) > 0$ car $\dfrac{e}{2} > 1$, donc $\sqrt{x} > \ln(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

3) Résolution de l'équation $g_n(x) = 0$ et limite de α_n

a. $g_n(x) = 0$

g_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$, donc g_n réalise une bijection de $\left]0^+ , +\infty\right[$ vers $\left]-\infty , +\infty\right[$.

L'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans $]0 , +\infty[$.

De plus, $g\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 + 2\ln\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 - 2\ln(n) = \ln(e) - \ln\left(n^2\right) = \ln\left(\dfrac{e}{n^2}\right)$, donc $\forall n \geq 3$, $g_n\left(\dfrac{1}{n}\right) < 0$.

Par ailleurs, $g_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} + 2\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} - \ln(n) > 0$ d'après la question 2.

On en déduit que $g_n\left(\dfrac{1}{n}\right) < 0 < g_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, c'est à dire que $g_n\left(\dfrac{1}{n}\right) < g_n(\alpha_n) < g_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Comme g_n est strictement croissante, alors $\dfrac{1}{n} < \alpha_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

b. Limite de α_n

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

Partie II

Etude de f

1) Dérivabilité de f à droite de zéro

f est définie sur $[0 , +\infty[$ par $f(x) = \sqrt[3]{x}\, e^{-x}$.

$\forall x>0$, on a $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{1}{\frac{2}{x^{3}}e^{x}}$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\frac{2}{x^{3}}e^{x}}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$, cela implique que f n'est pas dérivable à droite de zéro et que C_f admet une demi tangente verticale d'équation $x=0$ (axe des ordonnées).

2) Limite de f au voisinage + l'infini

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\,e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{e^{x}}=0$, donc C_f admet la droite d'équation $y=0$ (axe des abscisses) comme asymptote horizontale.

3) Variations de f

a. Dérivée de f

La fonction f est continue et dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$,

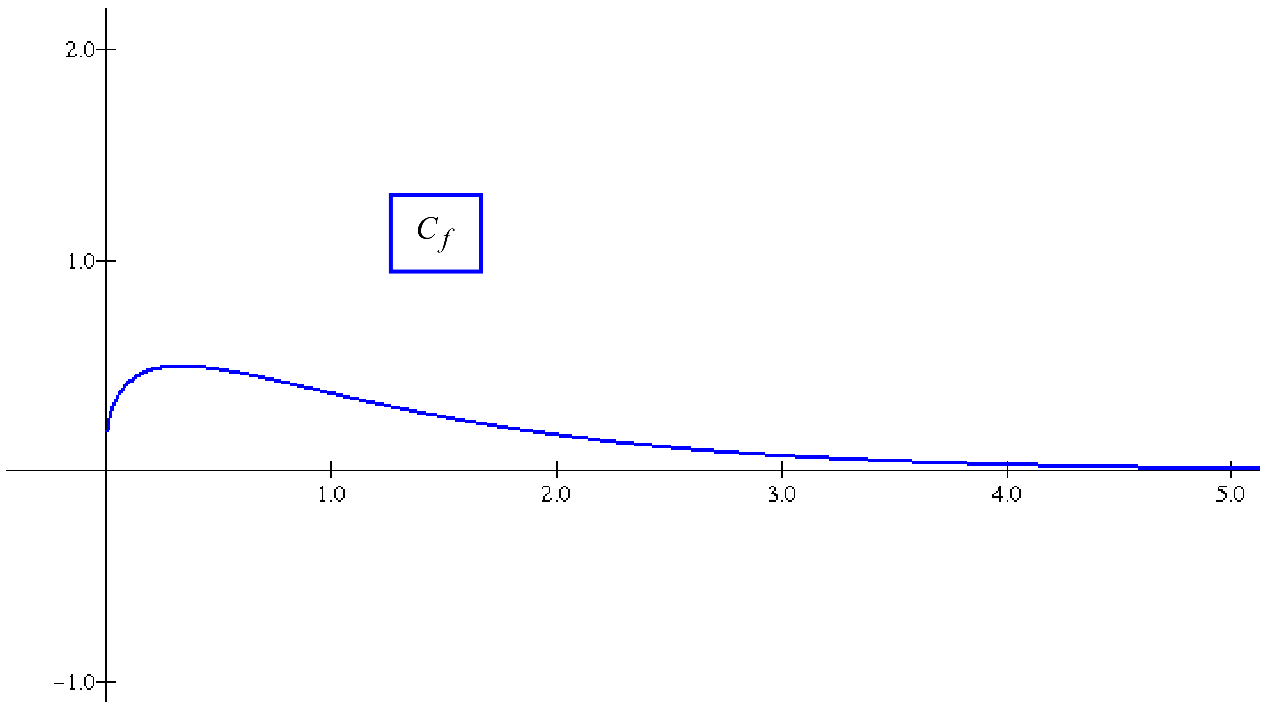
$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}e^{-x}-x^{\frac{1}{3}}e^{-x}=\left(\frac{1}{3x}-1\right)x^{\frac{1}{3}}e^{-x}=\left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x).$$

b. Tableau de variations de f

Pour tout x appartenant à $[0\,,+\infty[$, $f(x)=\sqrt[3]{x}\,e^{-x}$ est positive, le signe de f' ne dépend que du signe de $\dfrac{1-3x}{3x}$.

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+		-	
$f(x)$	0	↗	$0,5$	↘	0

4) Représentation graphique de f



Etude d'une suite

On pose $I = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$

1) Résolution d'une équation

a. $f(I) \subset I$

f est décroissante sur I et est à fortiori monotone, donc $f(I) = \left[f(1)\ ,\ f\left(\frac{1}{3}\right)\right]$.

De plus $f(1) = \frac{1}{e} > \frac{1}{3}$ et $f(1) \in I$

Et, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}} \times \frac{1}{e^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{(3e)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3e}}$,

Or, $3e > 1 \Rightarrow \sqrt[3]{3e} > \sqrt[3]{1} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{3e}} < 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) < 1$ et $f\left(\frac{1}{3}\right) \in I$.

Donc, $\frac{1}{3} < f(1) < f\left(\frac{1}{3}\right) < 1$ et au final, $f(I) \subset \left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

b. Majoration de f '

On se propose de démontrer que $\forall x \in I$, $\left|f^{'}(x)\right| \leq \frac{2}{3}$.

On a $f^{'}(x)=\left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x)$, soit $\left|f^{'}(x)\right|=\left|\frac{1-3x}{3x}\right|\left|f(x)\right|$, d'après le tableau de variations de f , on sait que $f(x)\leq f\left(\frac{1}{3}\right)\simeq 0,5<1 \ \ \forall x\in I$.

D'où, $\left|f^{'}(x)\right|\leq\left|\frac{1-3x}{3x}\right|$, or $\forall x\in I$, $\left|\frac{1-3x}{3x}\right|=\frac{3x-1}{3x}=1-\frac{1}{3x}$.

$\frac{1}{3}\leq x\leq 1 \ \Rightarrow\ 1\leq 3x\leq 3 \ \Rightarrow\ \frac{1}{3}\leq\frac{1}{3x}\leq 1 \ \Rightarrow\ 1-\frac{1}{3x}\leq 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

Au final, on a bien $\forall x\in I$, $\left|f^{'}(x)\right|\leq\frac{2}{3}$.

c. Une équivalence

On a $f(x)=x$ et $x>0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}\,e^{-x}=x$ et $x>0 \Leftrightarrow e^{-x}=x^{\frac{2}{3}}$ et $x>0$ $x+\frac{2}{3}\ln(x)=0$ et $x>0$

$\Leftrightarrow 3x+2\ln(x)=0$ et $x>0 \Leftrightarrow g_3(x)=0$ et $x>0$ $x=\alpha_3$.

2) Etude d'une suite

$\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ est la suite définie par $u_0=\frac{1}{3}$ et pour entier naturel n , $u_{n+1}=f(u_n)$.

a. pour entier naturel n , $u_n\in I$

Pour cela, on utilise un raisonnement par récurrence.

On a $u_0=\frac{1}{3}\in I$, on suppose que $u_n\in I$ et on s'intéresse à u_{n+1}.

Comme $f(I)\subset I$, alors $f(u_n)\in I$, c'est à dire $u_{n+1}=f(u_n)\in I$, d'où $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in I$.

b. Une inégalité

On a d'après la question 3.a de la partie I, $\frac{1}{3}<\alpha_3<\frac{1}{\sqrt{3}}$, donc $\alpha_3\in I$.

De plus, $\left|u_{n+1}-\alpha_3\right|=\left|f(u_n)-f(\alpha_3)\right|$

Or d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c\in\left]u_n\,,\alpha_3\right[$ tel que $f(u_n)-f(\alpha_3)=f^{'}(c)\,(u_n-\alpha_3)$.

Par ailleurs, on sait que $\forall x\in I$, $\left|f^{'}(x)\right|\leq\frac{2}{3}$, donc $\left|f^{'}(c)\right|\leq\frac{2}{3}$, D'où, $\left|f(u_n)-f(\alpha_3)\right|=\left|f^{'}(c)\right|\ \left|u_n-\alpha_3\right|$, et au final, $\left|u_{n+1}-\alpha_3\right|\leq\frac{2}{3}\ \left|u_n-\alpha_3\right|$.

c. Une autre inégalité

On va démontrer que pour entier naturel n, $\left|u_n-\alpha_3\right|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

On vient de démontrer que pour entier naturel n, $\left|u_{n+1}-\alpha_3\right|\leq\frac{2}{3}\ \left|u_n-\alpha_3\right|$, d'où par récurrence,

$$\begin{aligned}\left|u_n-\alpha_3\right| &\leq \frac{2}{3}\ \left|u_{n-1}-\alpha_3\right| \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^2\ \left|u_{n-2}-\alpha_3\right| \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^3\ \left|u_{n-3}-\alpha_3\right| \\ &\leq \ldots\ldots\end{aligned}$$

$$\left|u_n-\alpha_3\right|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n\ \left|u_0-\alpha_3\right|$$

Or, comme u_0 , $\alpha_3 \in I$, alors $\left|u_0-\alpha_3\right|\leq 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, alors, $\left|u_n-\alpha_3\right|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

d. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=0$, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha_3$.

Partie III

1) Etude de F

a. F est dérivable sur $[0\ ,+\infty[$

Soit $G(y)=\int_0^y f(t)\,dt$, alors $F(x)=G(8x)-G(x)$.

Comme G est dérivable sur $[0\ ,+\infty[$, alors l'est également.

b. Expression de F ' puis variations de F

On a $F^{'}(x) = 8G^{'}(8x) - G^{'}(x) \quad \forall x > 0$ et $\forall\, y > 0,\; G^{'}(y) = f(y)$

Donc, $\forall\, x > 0$,

$$F^{'}(x) = 8\,f(8x) - f(x) = 8\sqrt[3]{8x}\,e^{-8x} - \sqrt[3]{x}\,e^{-x} = \left(8\sqrt[3]{8}\,e^{-7x} - 1\right)\sqrt[3]{x}\,e^{-x} = \left(16\,e^{-7x} - 1\right)\sqrt[3]{x}\,e^{-x}.$$

Soit α la solution de $16e^{-7\alpha} - 1 = 0$, c'est à dire $\alpha = \dfrac{\ln(16)}{7} = \dfrac{4}{7}\ln(2)$.

Donc, F est croissante sur $\left[0\,,\,\alpha\right]$ et décroissante sur $\left[\alpha\,,\,+\infty\right[$.

2) Tableau de variations de F

a. Encadrement de F

Pour tout x appartenant à $\left[0\,,+\infty\right[$, on a $F(x) \geq 0$ du fait que f soit positive ou nulle sur $\left[0\,,+\infty\right[$.

Par ailleurs, $\quad F(x) = \displaystyle\int_{x}^{8x} \sqrt[3]{t}\,e^{-t}\,dt$

$$F(x) \leq \sqrt[3]{8x}\int_{x}^{8x} e^{-t}\,dt = 2\sqrt[3]{x}\left[-e^{-t}\right]_{x}^{8x} = 2\sqrt[3]{x}\,e^{-x}\left(1 - e^{-7x}\right) = 2\,f(x)\left(1 - e^{-7x}\right)$$

Finalement, pour tout x appartenant à $\left[0\,,+\infty\right[$, on a $0 \leq F(x) \leq 2\,f(x)\left(1 - e^{-7x}\right)$.

b. Limite de F au voisinage de + l'infini

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - e^{-7x} = 1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\,f(x)\left(1 - e^{-7x}\right) = 0$.

Donc la limite de F au voisinage de + l'infini existe et vaut zéro.

c. Tableau de variations de F

x	0		$\frac{4}{7}\ln(2)$		$+\infty$
$f^{'}(x)$		+		-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$F\left(\frac{4}{7}\ln(2)\right)$	$\searrow$	0

FIN